Kolokwium z Analizy Matematycznej, 13 kwietnia 2015r.

Czas trwania: 150 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na osobnych kartkach, podpisanych imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

1. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln(\cos 2x)}{x\sin(\sin x)}\right).$$

2. Funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia równanie $2f(x)=f'(x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$. Ponadto $f(0)=a$. Wykazać, że $f(x)=ae^{2x}$.

3. Wyznaczyć kresy zbioru wartości funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}.$$

4. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$x^x\cdot y^y \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}.$$

5. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)-x}{\operatorname{tg}(2x)-2\ln(1+x)-x^2}.$$

6. a) Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dana wzorem $g(x)=ax^2+bx+c$ spełnia

$$g(0)=g(1)=0 \qquad \text{oraz} \qquad g''(x)=1 \text{ dla wszystkich } x.$$

Wyznaczyć a, b, c oraz udowodnić, że $g(x)\geq -1/8$ dla wszystkich x.

b) Dwukrotnie różniczkowalna funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia warunki

$$f(0)=f(1)=0 \qquad \text{oraz} \qquad f''(x)\leq 1 \text{ dla wszystkich } x.$$

Dowieść, że dla dowolnej liczby $x\in[0,1]$ zachodzi $f(x)\geq -1/8$.

Wskazówka do b): zbadać funkcję $f-g$.